

7. Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son rectángulos. Hallar sus áreas.

- a) (0, 9), (-4, -1), (3, 2); c) (3, -2), (-2, 3), (0, 4);
 b) (10, 5), (3, 2), (6, -5); d) (-2, 8), (-6, 1), (0, 4).

Sol. Areas: a) 29, b) 29, c) 7,5, d) 15 unidades de superficie.

8. Demostrar que los puntos siguientes son los vértices de un paralelogramo:

- a) (-1, -2), (0, 1), (-3, 2), (-4, -1); c) (2, 4), (6, 2), (8, 6), (4, 8).
 b) (-1, -5), (2, 1), (1, 5), (-2, -1);

9. Hallar las coordenadas del punto que equidista de los puntos fijos:

- a) (3, 3), (6, 2), (8, -2); b) (4, 3), (2, 7), (-3, -8); c) (2, 3), (4, -1), (5, 2).

Sol. a) (3, -2), b) (-5, 1), c) (3, 1).

10. Demostrar, mediante la fórmula de la distancia, que los puntos siguientes son colineales:

- a) (0, 4), (3, -2), (-2, 8); c) (1, 2), (-3, 10), (4, -4);
 b) (-2, 3), (-6, 1), (-10, -1); d) (1, 3), (-2, -3), (3, 7).

11. Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera $P(x, y)$ a dos vértices opuestos de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las distancias a los otros dos vértices. Supóngase que las coordenadas de los vértices son (0, 0), (0, b), (a, b) y (a, 0).

12. Hallar el punto de abscisa 3 que diste 10 unidades del punto (-3, 6).

Sol. (3, -2), (3, 14).

13. Hallar las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divida al segmento que determinan $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la relación $r = \frac{P_1P}{PP_2}$.

a) $P_1(4, -3), P_2(1, 4), r = \frac{2}{1}$. d) $P_1(0, 3), P_2(7, 4), r = -\frac{2}{7}$.

b) $P_1(5, 3), P_2(-3, -3), r = \frac{1}{3}$. e) $P_1(-5, 2), P_2(1, 4), r = -\frac{5}{3}$.

c) $P_1(-2, 3), P_2(3, -2), r = \frac{2}{5}$. f) $P_1(2, -5), P_2(6, 3), r = \frac{3}{4}$.

Sol. a) $(2, \frac{5}{3})$, b) $(3, \frac{3}{2})$, c) $(-\frac{4}{7}, \frac{11}{7})$, d) $(-\frac{14}{5}, \frac{13}{5})$, e) (10, 7), f) $(\frac{26}{7}, -\frac{11}{7})$.

14. Hallar las coordenadas del baricentro de los triángulos cuyos vértices son:

- a) (5, 7), (1, -3), (-5, 1); c) (3, 6), (-5, 2), (7, -6); e) (-3, 1), (2, 4), (6, -2).
 b) (2, -1), (6, 7), (-4, -3); d) (7, 4), (3, -6), (-5, 2);

Sol. a) $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$, b) $(\frac{4}{3}, 1)$, c) $(\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$, d) $(\frac{5}{3}, 0)$, e) $(\frac{5}{3}, 1)$.

15. Sabiendo que el punto (9, 2) divide al segmento que determinan los puntos $P_1(6, 8)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la relación $r = 3/7$, hallar las coordenadas de P_2 .

Sol. (16, -12).

16. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son (-2, 1), (5, 2) y (2, -3).

Sol. (1, 6), (9, -2), (-5, -4).

17. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo cuyas coordenadas de los puntos medios de sus lados son (3, 2), (-1, -2) y (5, -4).

Sol. (-3, 4), (9, 0), (1, -8).

18. Demostrar analíticamente que las rectas que unen los puntos medios de los lados adyacentes del cuadrilátero $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$, $C(7, -6)$ y $D(-5, -4)$ forman otro cuadrilátero cuyo perímetro es igual a la suma de las diagonales del primero.
19. Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de dos lados de los triángulos del Problema 14 son paralelas al tercer lado e iguales a su mitad.
20. Dado el cuadrilátero $A(-2, 6)$, $B(4, 4)$, $C(6, -6)$ y $D(2, -8)$, demostrar que:
- La recta que une los puntos medios de AD y BC pasa por el punto medio del segmento que une los puntos medios de AB y CD .
 - Los segmentos que unen los puntos medios de los lados adyacentes del cuadrilátero forman un paralelogramo.
21. El segmento que une $A(-2, -1)$ con $B(3, 3)$ se prolonga hasta C . Sabiendo que $BC = 3AB$, hallar las coordenadas de C . *Sol.* (18, 15).
22. Demostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los vértices. *Ind.:* Supóngase que las coordenadas del vértice del ángulo recto son $(0, 0)$ y las de los otros vértices $(a, 0)$ y $(0, b)$.
23. Demostrar que en los triángulos isósceles del Problema 6 dos de las medianas son de la misma longitud.
24. Hallar las pendientes de las rectas que pasan por los puntos:
- $(3, 4)$, $(1, -2)$; *c)* $(6, 0)$, $(6, \sqrt{3})$; *e)* $(2, 4)$, $(-2, 4)$;
 - $(-5, 3)$, $(2, -3)$; *d)* $(1, 3)$, $(7, 1)$; *f)* $(3, -2)$, $(3, 5)$.
- Sol.* *a)* 3, *b)* $-\frac{6}{7}$, *c)* ∞ , *d)* $-\frac{1}{3}$, *e)* 0, *f)* ∞ .
25. Hallar las inclinaciones de las rectas que pasan por los puntos:
- $(4, 6)$ y $(1, 3)$; *c)* $(2, 3)$ y $(1, 4)$; *e)* $(\sqrt{3}, 2)$ y $(0, 1)$;
 - $(2, \sqrt{3})$ y $(1, 0)$; *d)* $(3, -2)$ y $(3, 5)$; *f)* $(2, 4)$ y $(-2, 4)$.
- Sol.* *a)* $\theta = \text{tg}^{-1} 1 = 45^\circ$; *c)* $\theta = \text{tg}^{-1} -1 = 135^\circ$; *e)* $\theta = \text{tg}^{-1} 1/\sqrt{3} = 30^\circ$;
b) $\theta = \text{tg}^{-1} \sqrt{3} = 60^\circ$; *d)* $\theta = \text{tg}^{-1} \infty = 90^\circ$; *f)* $\theta = \text{tg}^{-1} 0 = 0^\circ$.
26. Aplicando el concepto de pendiente, averiguar cuáles de los puntos siguientes son colineales.
- $(2, 3)$, $(-4, 7)$ y $(5, 8)$; *d)* $(0, 5)$, $(5, 0)$ y $(6, -1)$;
 - $(4, 1)$, $(5, -2)$ y $(6, -5)$; *e)* $(a, 0)$, $(2a, -b)$ y $(-a, 2b)$;
 - $(-1, -4)$, $(2, 5)$ y $(7, -2)$; *f)* $(-2, 1)$, $(3, 2)$ y $(6, 3)$.
- Sol.* *a)* No, *b)* Sí, *c)* No, *d)* Sí, *e)* Sí, *f)* No.
27. Demostrar que el punto $(1, -2)$ está situado en la recta que pasa por los puntos $(-5, 1)$ y $(7, -5)$ y que equidista de ellos.
28. Aplicando el concepto de pendiente, demostrar que los puntos siguientes son los vértices de un triángulo rectángulo.
- $(6, 5)$, $(1, 3)$ y $(5, -7)$; *c)* $(2, 4)$, $(4, 8)$ y $(6, 2)$;
 - $(3, 2)$, $(5, -4)$ y $(1, -2)$; *d)* $(3, 4)$, $(-2, -1)$ y $(4, 1)$.
29. Hallar los ángulos interiores de los triángulos cuyos vértices son:
- $(3, 2)$, $(5, -4)$ y $(1, -2)$; *Sol.* $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.
 - $(4, 2)$, $(0, 1)$ y $(6, -1)$; *Sol.* $109^\circ 39,2', 32^\circ 28,3', 37^\circ 52,5'$.
 - $(-3, -1)$, $(4, 4)$ y $(-2, 3)$; *Sol.* $113^\circ 29,9', 40^\circ 25,6', 26^\circ 4,5'$.

30. Demostrar, hallando los ángulos interiores, que los triángulos siguientes son isósceles, y efectuar la comprobación calculando las longitudes de los lados.

- a) (2, 4), (5, 1) y (6, 5); Sol. $59^\circ 2,2'$, $61^\circ 55,6'$, $59^\circ 2,2'$.
 b) (8, 2), (3, 8) y (-2, 2); Sol. $50^\circ 11,7'$, $79^\circ 36,6'$, $50^\circ 11,7'$.
 c) (3, 2), (5, -4) y (1, -2); Sol. 45° , 45° , 90° .
 d) (1, 5), (5, -1) y (9, 6); Sol. $63^\circ 26'$, $63^\circ 26'$, $53^\circ 8'$.

* 31. La pendiente de una recta que pasa por el punto $A(3, 2)$ es igual a $3/4$. Situar dos puntos sobre esta recta que disten 5 unidades de A .

Sol. (7, 5), (-1, -1).

32. El ángulo formado por la recta que pasa por los puntos $(-4, 5)$ y $(3, y)$ con la que pasa por $(-2, 4)$ y $(9, 1)$ es de 135° . Hallar el valor de y . Sol. $y = 9$.

33. La recta L_2 forma un ángulo de 60° con la recta L_1 . Si la pendiente de L_1 es 1, hallar la pendiente de L_2 .
 Sol. $-(2 + \sqrt{3})$.

34. Hallar la pendiente de una recta que forma un ángulo de 45° con la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(2, -1)$ y $(5, 3)$. Sol. $m_2 = -7$.

35. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 5)$ y forma un ángulo de 45° con la recta de ecuación $x - 3y + 6 = 0$. Sol. $2x - y + 1 = 0$.

36. Hallar las áreas de los triángulos cuyas coordenadas de los vértices son:

- a) (2, -3), (4, 2) y (-5, -2) Sol. 18,5 unidades de superficie.
 b) (-3, 4), (6, 2) y (4, -3) Sol. 24,5.
 c) (-8, -2), (-4, -6) y (-1, 5) Sol. 28.
 d) (0, 4), (-8, 0) y (-1, -4) Sol. 30.
 e) $(\sqrt{2}, 2)$, $(-4, 6)$ y $(4, -2\sqrt{2})$ Sol. $7\sqrt{2} - 2 = 7,899$.
 f) (-7, 5), (1, 1) y (-3, 3) Sol. 0. Razonar la respuesta.
 g) $(a, b + c)$, $(b, c + a)$ y $(c, a + b)$ Sol. 0.

37. Hallar las áreas de los polígonos cuyas coordenadas de los vértices son:

- a) (2, 5), (7, 1), (3, -4) y (-2, 3) Sol. 39,5 unidades de superficie.
 b) (0, 4), (1, -6), (-2, -3) y (-4, 2) Sol. 25,5.
 c) (1, 5), (-2, 4), (-3, -1), (2, -3) y (5, 1) Sol. 40.

38. Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de los lados de los triángulos del Problema 36 dividen a cada uno de ellos en cuatro triángulos de áreas iguales.